228

# Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

## I] Continuité

Soit $a<b\in\mathbb{R}^2$, $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ intervalle d'extrémités $a$ et $b$.

### 1] Notion de continuité et caractérisation

VI.1 [Rom]

**Définition 1 :** On dit que $f:I\to\mathbb{R}$ est continue sur $I$ si : $\forall a\in I$, $f(a)\xrightarrow[x\to a]{}f(a)$. On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues.

**Exemple 2 :** Les constantes sont dans $\mathcal{C}(I)$.

**Théorème 3 :** (caractérisation séquentielle de la continuité) $f:I\to\mathbb{R}$ est continue en $x\in\mathbb{R}$ ssi $\forall (x_n)\in I^{\mathbb{N}}$, $x_n\xrightarrow[+\infty]{}x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$

**Exemple 4 :** $f:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \cos(\frac{1}{x}) & \text{sinon}\end{cases}$ n'est pas continue en $0$.

**Théorème 5 :** $f:I\to\mathbb{R}$ est continue sur $I$ ssi l'image réciproque par $f$ de tout ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp. fermé)

VI.2 [Rom]

**Proposition 6 :** Soit $f,g:I\to\mathbb{R}$ continues en $x\in I$.
**Alors :** $|f|$ ; $f+g$ ; $fg$ ; $\min(f,g)$ ; $\max(f,g)$ sont continues en $x$.

**Exemple 7 :** Les fonctions polynomiales sont continues.

### 2] Fonctions continues sur un convexe ou un compact

VI.3 [Rom]

**Remarque 8 :** Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

**Théorème 9 :** Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue.
**Alors :** $f(I)$ est un intervalle.

**Théorème 10 :** (des valeurs intermédiaires) Soit $I=[a;b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b)<0$.
**Alors :** $\exists x\in]a;b[\ \backslash\ f(x)=0$

**Contrexemple 11 :** La réciproque est fausse
$f(x)=\sin(\frac{1}{x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}$ vérifie $f(0)=0$ mais n'est pas continue en $0$.

**Théorème 12 :** Soit $f:I\to\mathbb{R}$ monotone strictement, continue
**Alors :** $f:I\to f(I)$ est un homéomorphisme

**Exemple 13 :** On peut définir la fonction exponentielle comme l'inverse de $\ln$.

### 3] Préservation de la continuité

VI.5 [Rom]

Soit $(f_n:I\to\mathbb{R})\in\mathcal{C}(I)^{\mathbb{N}}$.

**Théorème 14 :** Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$
**Alors :** $f$ est continue

**Contrexemple 15 :** La convergence uniforme est vitale
$(f_n:\underset{x\mapsto x^n}{[0;1]\to[0;1]})\to f:\underset{x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}{[0;1]\to[0;1]}$ n'est pas continue.

**Théorème 16 :** (de continuité sous le signe $\sum$) Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact.
**Alors :** $\sum f_n$ est continue

**Théorème 17 :** (de continuité sous le signe $\int$) Soit $J\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $f:I\times J\to\mathbb{R}$ tq : $\forall x\in I$, $f(x;\cdot)$ mesurable, $\forall t\in J$, $f(\cdot;t)$ continue et $g\in L^1(I)$ telle que $\forall x\in I$, $|f(x;\cdot)|\leq g$
**Alors :** $F:x\mapsto\int_J f(x;t)\,dt$ est continue sur $I$

**Application 18 :** $\forall f\in L^1$, $\mathcal{F}(f)$ est continue

## II] Dérivabilité

### 1] Notion de dérivabilité et opérations

VII.1 [Rom]

**Définition 19 :** On dit que $f$ est dérivable en $x\in I$ si $\frac{f(x)-f(x)}{x-x}$ admet une limite lorsque $x\to x$. On note $f'(x)$ cette limite.

**Théorème 20 :** Si $f$ est dérivable en $x\in I$, alors elle est continue en $x$.

**Contrexemple 21 :** La réciproque est fausse.
$x\mapsto|x|$ est continue en $0$ mais n'est pas dérivable en $0$.

VII.2 [Rom]

**Proposition 22 :** Soit $f,g:I\to\mathbb{R}$ dérivables en $x\in I$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^2$.
**Alors :** (1) $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x)$
(2) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
(3) Si $g(x)\neq0$, alors : $(\frac{1}{g})'(x)=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ et $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

**Théorème 23 :** Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue strictement monotone dérivable en $x\in I$.
**Alors :** $f^{-1}$ est dérivable en $f(x)$ ssi $f'(x)\neq0$ et $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

## 2] Résultats importants de fonctions dérivables

**Proposition 24 :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x \in \mathring{I}$ extremum local
Alors : $f'(x) = 0$

VII.5

**Contrexemple 25 :** La réciproque est fausse.
$f : x \mapsto x^3$ vérifie bien $f'(0) = 0$ mais $0$ n'est pas extremum local.

**Théorème 26 :** (de Rolle) Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $I$, dérivable sur $]a;b[$, tel que $f(a) = f(b)$.
Alors : $\exists c \in ]a;b[ \mid f'(c) = 0$

IX.1

**Contrexemple 27 :** (1) Si $f$ n'est pas continue aux bords, alors le théorème est faux : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ sur $[0;1]$ vérifie bien les hypothèses sans avoir de $c \in ]0;1[$ tel que $f'(c) = 0$
(2) Si $f$ n'est pas dérivable, le théorème est faux : $x \mapsto |x|$ vérifie les autres hypothèses sans avoir de $c \in ]0;1[$ tq : $f'(c) = 0$.

[Rom]

**Théorème 28 :** (des accroissements finis) Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$.
Alors : $\exists c \in ]a;b[ \mid f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

**Corollaire 29 :** (inégalité des accroissements finis) Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$
Alors : $\exists c \in ]a;b[ \mid |f(b) - f(a)| \leq |f'(c)|\,|b-a|$

VII.7

**Application 30 :** (théorème fondamental du calcul intégral) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a;b]$ et $f'$ Riemann-intégrable sur $[a;b]$.
Alors : $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

**Théorème 31 :** (d'intégration par parties) Soit $f, g$ deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ avec $f', g'$ Riemann-intégrables sur $[a;b]$.
Alors : $\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

[Les]

**Application 32 :** Les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ sont convergentes et valent $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

## 3] Dérivation d'ordre supérieur

**Définition 33 :** On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ avec $f^{(n)}$ continue sur $I$.

[Rom] VII.1

**Théorème 34 :** (de Taylor) Soit $f \in \mathcal{C}^{(n)}([a;b];\mathbb{R})$
Alors : (1) (Taylor avec reste intégral) Si $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a;b])$,
alors : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt$
(2) (Taylor-Lagrange) Si $f$ est $\mathcal{D}^{(n+1)}(]a;b[)$, alors :
$\exists c \in ]a;b[ \mid f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
(3) (Taylor-Young) Si $f$ est $n$ fois dérivable en $a \in I$,
alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

**Application 35 :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}$ ; $|\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}| \leq \frac{|x|^5}{5!}$
et $|\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}$

## 4] Espaces de Hölder

**Remarque 36 :** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathcal{C}^{k+1} \subseteq \mathcal{C}^k \subseteq \mathcal{C}^{k-1}$. Mais il y a des limites : une suite bornée de $\mathcal{C}^k$ n'a pas forcément sa limite dans $\mathcal{C}^k$.

VIII.III.1

**Définition 37 :** Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\alpha \in ]0;1]$. On définit :
$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \{ f \in L^\infty(\Omega) \mid \exists C > 0 \mid \forall x, y \in \Omega, |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \}$
et $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$

**Exemple 38 :** $f : \begin{array}{l} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^\alpha \end{array} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-1;1[)$.

**Remarque 39 :** (1) $\mathcal{C}_b^1(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}_b^0(\Omega)$
(2) Les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ sont uniformément continues.

[ZQ]

**Définition 40 :** Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in ]0;1]$. On définit :
$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{C}_b^k(\Omega) \mid \forall \beta \leq k, f^{(\beta)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \}$
$\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{\beta \leq k} \|f^{(\beta)}\|_\alpha$ et $\|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{\beta \leq k} \|f^{(\beta)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\alpha$

**Théorème 41 :** (1) Soit $k + \alpha > k' + \alpha'$, alors $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^{k',\alpha'}$ et l'inclusion est continue.
(2) Si $\Omega$ est ouvert, borné, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \mid \|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C_\varepsilon \|f\|_\infty$
(3) Si $\Omega$ est ouvert, borné, alors l'injection de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.
(4) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algèbre multiplicative i.e. si $u, v \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$,
alors : $uv \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ et $\|uv\|_{k,\alpha} \leq C \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$

[Zo] III.1

**Théorème 42 :** Soit $\alpha \in ]0;1]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $q \geq 0$

Alors : $\forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a;b[)$, $\forall u_0;u_1 \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} -u'' + qu = f \text{ sur } ]a;b[ \\ u(a) = u_0 \\ u(b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a;b[)$.

## III] Dérivations faibles

### 1] Dérivée faible et théorème d'intégration par parties

IX.2

**Définition 43 :** On dit que $u \in L^p(I)$ a une dérivée faible si : $\exists v \in L^p(I) \mid \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_K(I)$, $\int_I u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_I v(t)\varphi(t)\,dt$

**Exemple 44 :** Pour $u : \begin{array}{l} ]-1;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \mathbb{1}_{[0;1[}(x) \end{array}$ admet une dérivée faible : $v = \mathbb{1}_{[0;1[}$.

[Li]

**Lemme 45 :** Soit $v_1, v_2 \in L^1_{loc}(I)$ tq : $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_K(I)$, $\int_I v_1(t)\varphi(t)\,dt = \int_I v_2(t)\varphi(t)\,dt$

Alors : $v_1 = v_2$ presque partout

**Proposition 46 :** Si $u$ admet une dérivée faible, alors elle est unique. On la note $u' = v$.

### 2] Espaces de Sobolev et application aux EDP

IX.2

**Définition 47 :** Pour $p \in [1;+\infty[$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est :

$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) \mid u \text{ a une dérivée faible } u' \in L^p(I)\}$

$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p$

[Li]

Pour $p=2$, on note $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ muni du produit scalaire : $\langle u|v\rangle = \langle u|v\rangle_2 + \langle u'|v'\rangle_2$ de norme $\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$

**Proposition 48 :** $(H^1(I); \langle|\rangle)$ est un espace de Hilbert séparable.

[Ireu]

**Application 49 :** Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ borné et $(a_{i,j}) \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $b_0 > 0$. Soit (E) le problème : trouver $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que : $-\sum_{i,j} \partial_i(a_{i,j}\partial_j(u)) + b_0 u = f$ tel que l'opérateur vérifie : $\exists \mu > 0 \mid \forall x = (x_1;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(y) x_i x_j \geq \mu \sum_i x_i^2$

Alors : $\exists! u \in H^1_0(\Omega)$ solution de (E).

### 3] Distributions et dérivation de distributions

X.1

**Définition 50 :** On note $\mathcal{D}(I) = \mathcal{C}^\infty_K(I)$, $supp(\varphi) = \overline{\{x \in I \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ le support de $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

[Li]

**Exemple 51 :** $\varphi(x) = \exp\left[-\frac{1}{1-|x|^2}\right]\mathbb{1}_{]-1;1[} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

**Définition 52 :** On appelle distribution sur l'ouvert $I$ toute forme linéaire $T : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ telle que : $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists m_K \in \mathbb{N} \mid \exists C_K > 0 \mid \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $supp(\varphi) \subseteq K \Rightarrow |T(\varphi)| \leq C_K \sum_{j=0}^{m_K} \|\varphi^{(j)}\|_\infty$

On note $\mathcal{D}'(I)$ leur ensemble.

**Exemple 53 :** $\delta_{x_0} : \begin{array}{l} \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(x_0) \end{array} \in \mathcal{D}'(I)$

**Proposition 54 :** Toute $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution $T_f$ sur $\Omega$ et $T_f = T_g$ pour $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ ssi $f = g$ presque partout

X.3

**Définition 55 :** Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. La dérivée de $T$ est : $T' \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $T'(\varphi) = -T(\varphi')$

**Exemple 56 :** $\delta_a'(\varphi) = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a)$

**Proposition 57 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}^1_m$, discontinue en $a_1;\dots;a_n$.

Alors : si $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^n [f(a_k^+) - f(a_k^-)]\delta_{a_k}$

**Exemple 58 :** Pour $H : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$, on a :

$(T_H)' = 0 + 1 \times \delta_0 = \delta_0$

Références :


[Rom] Éléments d'analyse réelle — Rombaldi

[ElAm] Suites et séries — El Amrani

[Les] 131 développements pour l'oral — Lesesvre

[ZQ] Éléments d'analyse — Zuily

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle — Li

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques — Isenmann